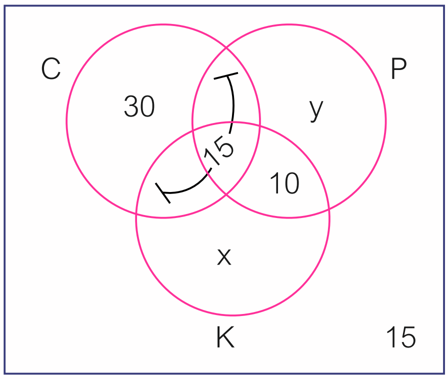
1) **วิธีทำ** จากโจทย์นำข้อมูลมาวาดเป็นเซตได้ดังนี้

โดยกำหนด

C = เซตของนักท่องเที่ยวที่เคยไปเที่ยวจังหวัดเชียงใหม่

P = เซตของนักท่องเที่ยวที่เคยไปเที่ยวจังหวัดภูเก็ต

K = เซตของนักท่องเที่ยวที่เคยไปเที่ยวจังหวัดกระบี่



จากโจทย์บอกว่า

มีนักท่องเที่ยวจำนวน 15 คน ไม่เคยไปเที่ยวทั้ง 3 จังหวัดเหล่านี้

$U = n(C \cup P \cup K) + n(C \cup P \cup K)'$

$n(C \cup P \cup K) = U - n(C \cup P \cup K)'$

$= 100 - 15$ $\therefore n(C \cup P \cup K) = 85$

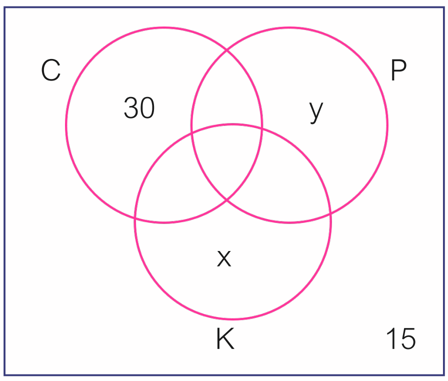
จาก $n(C \cup P \cup K) = 85$

$85 = 30 + 15 + 10 + x + y$

$85 = 55 + x + y$

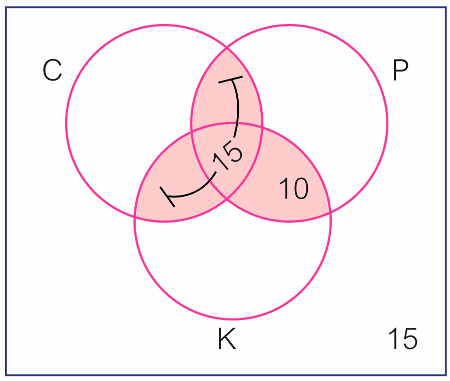
$30 = x + y$

จาก ก. มีนักท่องเที่ยว 60 คน
ที่เคยไปเที่ยวเพียงจังหวัดเดียวเท่านั้น
จาก 3 จังหวัดที่ทำการสำรวจ



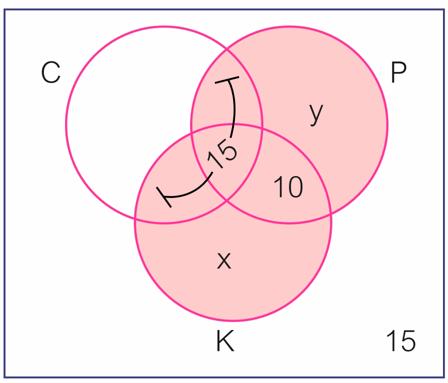
$30 + x + y = 30 + 30 = 60$ $\therefore$ ข้อ ก ✓

จาก ข. มีนักท่องเที่ยว 25 คน
ที่เคยไปเที่ยวอย่างน้อย 2 จังหวัด
จาก 3 จังหวัดที่ทำการสำรวจ



$15 + 10 = 25$ $\therefore$ ข้อ ข ✓

จาก ค. มีนักท่องเที่ยว 55 คน ที่เคยไปเที่ยวทั้งจังหวัดภูเก็ตและกระบี่

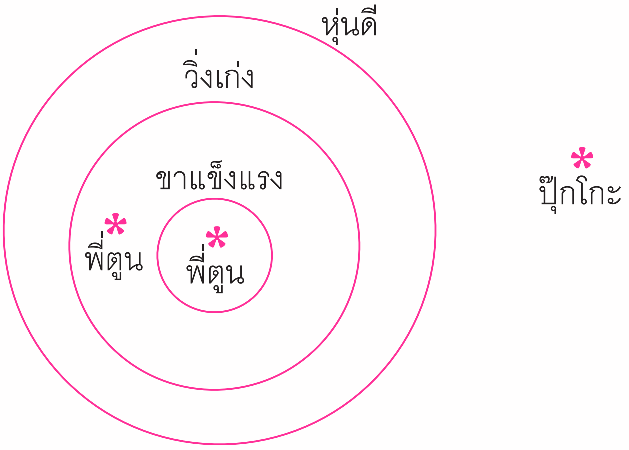


$15 + 10 + x + y = 15 + 10 + 30 = 55$ $\therefore$ ข้อ ค ✓

$\therefore$ ข้อ ก., ข. และ ค. ถูกทั้งสามข้อ

ตอบ D

2) **<u>วิธีทำ</u>** จากเหตุที่โจทย์กำหนด สามารถนำมาวาดเป็นแผนภาพได้ดังนี้



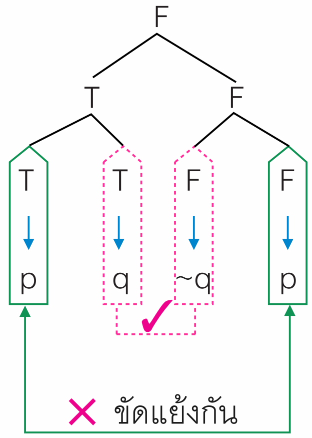
*** จากโจทย์ที่กำหนดว่า “พี่ตูนวิ่งเก่ง” ทำให้ในแผนภาพ “พี่ตูน” สามารถอยู่ได้สองที่ คือ

- พี่ตูนเป็นพวกวิ่งเก่ง แต่ไม่ใช่พวกขาแข็งแรง
- พี่ตูนเป็นพวกวิ่งเก่ง และเป็นไปได้ที่จะเป็นพวกขาแข็งแรง

เนื่องจาก เราไม่สามารถตอบได้ว่า “พี่ตูนขาแข็งแรง” เพราะ เป็นแค่ความเป็นไปได้เฉยๆ และเมื่อทำการวิเคราะห์จากตัวเลือกอื่น ๆ จะเห็นว่าการอ้างเหตุผลที่สมเหตุผลที่สุด คือ “พี่ตูนหุ่นดี”

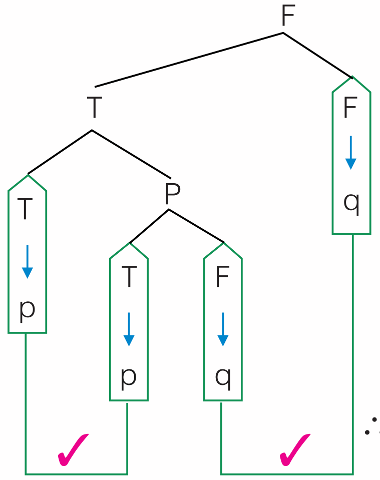
<u>ตอบ</u> D

3) **วิธีทำ** จาก ก. ใช้วิธีบังคับเท็จ $(p \wedge q) \longrightarrow (\sim q \vee p)$



∴ ไม่สามารถบังคับเท็จได้ จึงเป็นสัจนิรันด์ ข้อ ก. ✓

จาก ข. ใช้วิธีบังคับเท็จ $[p \longrightarrow (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$



∴ ไม่ขัดแย้ง บังคับเท็จสำเร็จ ไม่เป็นสัจนิรันด์ ข้อ ข. ✓

จาก ค. ใช้ตารางค่าความจริง $q \longleftrightarrow [(p \vee (q \longrightarrow p)) \wedge \sim p]$

p	q	$q \longrightarrow p$	$p \vee (q \longrightarrow p)$ (1)	$\sim p$	(1) $\wedge \sim p$ (2)	$q \longleftrightarrow$ (2)
T	T	T	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	F

∴ ไม่เป็นสัจนิรันด์ ข้อ ค. ✕

ดังนั้น ข้อ ก. และ ข. ถูก แต่ข้อ ค. ผิด ซึ่งตรงกับตัวเลือก A

ตอบ A

4) **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์ให้หาค่าความจริงของประพจน์ย่อยแต่ละอันให้ครบก่อน

พิจารณา P(x) ;

แทนค่า $x = -4$; $(-4)^2 - 1 \geq -4$

$16 - 1 \geq -4$

$15 \geq -4$ ✓ $\therefore$ T

แทนค่า $x = -2$; $(-2)^2 - 1 \geq -2$

$4 - 1 \geq -2$

$3 \geq -2$ ✓ $\therefore$ T

แทนค่า $x = 0$; $(0)^2 - 1 \geq 0$

$-1 \geq 0$ ✗ $\therefore$ F

สามารถหยุดได้ เนื่องจาก ทราบค่าความจริงสำหรับ $\exists x[P(x)]$, $\forall x\,[P(x)]$ แล้ว

$\exists x[P(x)] \equiv T$, $\forall x\,[P(x)] \equiv F$

พิจารณา Q(x) ;

แทนค่า $x = -4$; $|-4| < 5 - |-4-2|$

$4 < 5 - |-6|$

$4 < 5 - 6$

$4 < -1$ ✗ $\therefore$ F

แทนค่า $x = -2$; $|-2| < 5 - |-2-2|$

$2 < 5 - |-4|$

$2 < 5 - 4$

$2 < 1$ ✗ $\therefore$ F

แทนค่า $x = 0$; $|0| < 5 - |0 - 2|$

$0 < 5 - |-2|$

$0 < 5 - 2$

$0 < -3$ ✓ $\therefore$ T

สามารถหยุดได้ เนื่องจาก ทราบค่าความจริงสำหรับ $\exists x[Q(x)]$, $\forall x\,[Q(x)]$ แล้ว

$\exists x[Q(x)] \equiv T$, $\forall x\,[P(x)] \equiv F$

4) **วิธีทำ** (ต่อ)

จากค่าความจริงที่หาได้

$\exists x[P(x)] \equiv T$, $\forall x\,[P(x)] \equiv F$, $\exists x[Q(x)] \equiv T$, $\forall x\,[P(x)] \equiv F$

แทนลงในข้อความประพจน์ ก., ข. และ ค. ที่โจทย์กำหนดมาให้ ดังนี้

โดยใช้ความรู้

$$\boxed{p \longrightarrow q \;\equiv\; \sim q \longrightarrow \sim p}$$

ก. ประพจน์ $\forall x[\sim Q(x)] \longrightarrow \exists x[\sim P(x)] \;\equiv\; \forall x[P(x)] \longrightarrow \exists x[Q(x)] \;\equiv\; F \longrightarrow T \;\equiv\; T$ $\quad\therefore$ ข้อ ก. ✓

ข. ประพจน์ $\exists x[P(x)] \longrightarrow \exists x[\sim Q(x)] \;\equiv\; \forall x[Q(x)] \longrightarrow \sim\exists x[Q(x)] \;\equiv\; F \longrightarrow \sim T \;\equiv\; F \longrightarrow F \;\equiv\; T$

$\therefore$ ข้อ ข. ✕

ค. ประพจน์ $\forall x[P(x)] \longrightarrow \forall x[Q(x)] \;\equiv\; F \longrightarrow F \;\equiv\; T$ $\quad\therefore$ ข้อ ค. ✓

ดังนั้น ข้อ ก. และ ค. ถูก แต่ข้อ ข. ผิด ซึ่งตรงกับตัวเลือก B

ตอบ B

5) **วิธีทำ** จากโจทย์กำหนดให้ $x^2 + ax + b$ หาร $x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ เหลือเศษ 10

จากนิยาม ตัวตั้ง = (ผลลัพท์)(ตัวหาร) + เศษ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + 7 = (\text{ผลลัพท์})(x^2 + ax + b) + 10$$

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (\text{ผลลัพท์})(x^2 + ax + b)$$

แยกตัวประกอบโดยกำหนดให้ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

1. ลองสุ่มค่า $c = 1$ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ เพื่อตรวจสอบว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ หรือไม่

   $P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) - 3 = 1 - 3 + 5 - 3 = 0$

   จะได้ว่า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ดังนั้น $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

2. นำ $x - 1$ ไปหาร $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ โดยการหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

   จะได้ว่า $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)$

3. จากข้อ 2. เราจะได้ $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)$

   จะสังเกตว่าเราไม่สามารถแยกตัวประกอบ $(x^2 - 2x + 3)$ ต่อได้ เพราะ $b^2 - 4ac < 0$

   $(-2)^2 - 4(1)(3) < 0$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (\text{ผลลัพท์})(x^2 + ax + b)$$

$$(x - 1)(x^2 - 2x + 3) = (\text{ผลลัพท์})(x^2 + ax + b)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างพจน์ $(x^2 - 2x + 3)$ และ $(x^2 + ax + b)$ จะได้ว่า $a = -2$ และ $b = 3$

ดังนั้น $a + b = (-2) + 3 = 1$

ตอบ C

6) **วิธีทำ** จากโจทย์กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{5 - g(x)}$ และ $g(x) = \sqrt{5 + 2x}$

จะได้ว่า $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 + 2x}}$

หาฟังชันก์ $fog(x) = f(g(x))$

$$fog(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 + 2g(x)}}$$

$$fog(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5 + 2x}}}$$

โจทย์ต้องการหา $D_{fog}(x)$ คือ เซตของ x ที่ทำให้ค่าของ fog(x) ได้ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คู่}]{\square}$; ค่า $\square \geq 0$

เงื่อนไขที่ 1 : $5 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5 + 2x}} \geq 0$

$$5 \geq \sqrt{5 + 2\sqrt{5 + 2x}}$$

$$25 \geq 5 + 2\sqrt{5 + 2x}$$

$$10 \geq \sqrt{5 + 2x}$$

$$100 \geq 5 + 2x$$

$$\frac{95}{2} \geq x$$

เงื่อนไขที่ 2 : $5 + 2\sqrt{5 + 2x} \geq 0$

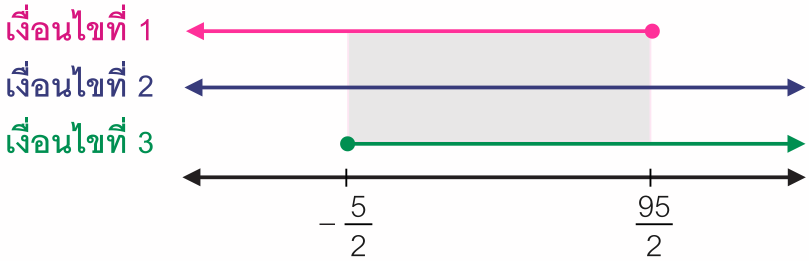
$$\sqrt{5 + 2x} \geq -\frac{5}{2}$$

จะเห็นว่าเงื่อนไขที่ 2 เป็นจริงเสมอ เพราะ ค่ารูทเป็นบวกเสมอ (มากกว่า 0)

เงื่อนไขที่ 3 : $\sqrt{5 + 2x} \geq 0$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

นำทั้ง 3 เงื่อนไขมาอินเตอร์เซคกัน ($\cap$)



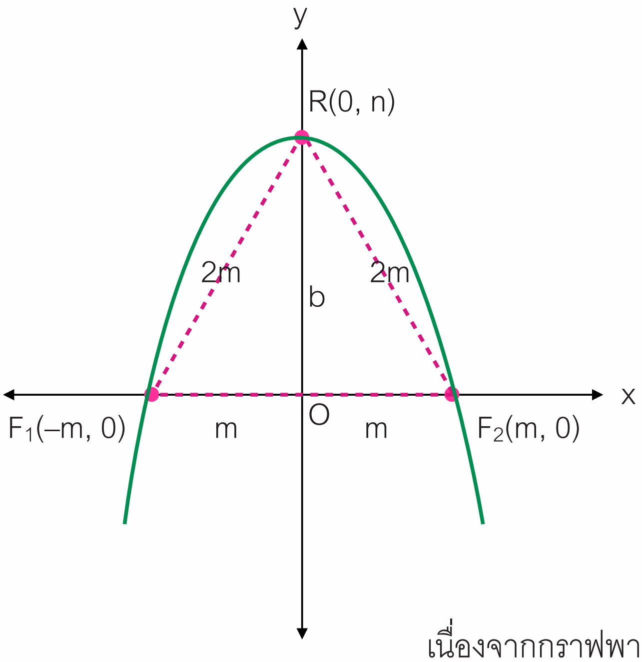
จะได้ว่า $D_{fog} = [-\frac{5}{2}, \frac{95}{2}]$

จากโจทย์กำหนดให้ $D_{fog} = [a, b] = [-\frac{5}{2}, \frac{95}{2}]$ ดังนั้น $a = -\frac{5}{2}$ และ $b = \frac{95}{2}$

โจทย์ต้องการหาค่า $4(a + b) = 4(-\frac{5}{2} + \frac{95}{2}) = 4(45) = 180$

ตอบ E

7) **วิธีทำ** วาดรูปตามที่โจทย์ให้มา



เนื่องจาก F_1F_2R เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ดังนั้น $F_1F_2 = F_1R = RF_2 = 2m$

$$OF_2^2 + OR^2 = RF_2^2$$
$$m^2 + n^2 = (2m)^2$$
$$m^2 + n^2 = 4m^2$$
$$n^2 = 3m^2$$
$$n = \sqrt{3}m$$

โจทย์กำหนดให้เลตัสเรกตัมยาวเท่ากับ 1 หน่วย

$$|4c| = 1$$
$$c = -\frac{1}{4}\ ,\ \cancel{\frac{1}{4}}$$

เนื่องจากกราฟพาราโบลาที่เราวาดขึ้นมาเป็นพาราโบลาคว่ำ ดังนั้น $c < 0$

จากสมการพาราโบลาคว่ำรูปแบบมาตรฐาน : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$$(x-0)^2 = 4(-\frac{1}{4})(y-n) \qquad ; \text{ จุด R เป็นจุดยอดพาราโบลา } V(h, k) = (0, n)$$
$$x^2 = -y + n$$
$$x^2 = -y + \sqrt{3}\,m \qquad ; \text{ แทนค่า } n = \sqrt{3}\,m$$

โจทย์กำหนดให้พาราโบลาผ่านจุด F_1 และ F_2 ดังนั้น เมื่อแทนค่า $x = m$ และ $y = 0$ จะทำให้สมการเป็นจริง

$$m^2 = -0 + \sqrt{3}\,m$$
$$m = \sqrt{3} \Rightarrow n = \sqrt{3}\,m \Rightarrow n = 3$$

โจทย์ต้องการสมการวงรี โดยที่จุด F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรี และผ่านจุด R

แสดงว่า $c = \sqrt{3}$, $b = 3$ และจุดศูนย์กลางของวงรี คือ C(0, 0)

จากความสัมพันธ์วงรี ;

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$a^2 = 12$$

สมการมาตรฐานวงรีนอน คือ $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$

$$\frac{(x-0)^2}{12} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{12} + \frac{(y-0)^2}{9} = 1$$

โจทย์ต้องการหาว่าจุดในตัวเลือกใดที่ผ่านวงรี คือลองแทนค่าแต่ละตัวเลือกลงไปในสมการวงรี

เมื่อน้องลองแทนค่าจะพบว่า ตัวเลือก A $\left(-\sqrt{\frac{32}{2}}, 1\right)$ คือจุดที่เมื่อแทนค่าแล้วทำให้สมการเป็นจริง

ตอบ A

8) **วิธีทำ** จากโจทย์กำหนดให้ไฮเพอร์โพลา H มีสมการ $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

จัดรูปสมการทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ;

$$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$$
$$16x^2 - 9y^2 = 144$$
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

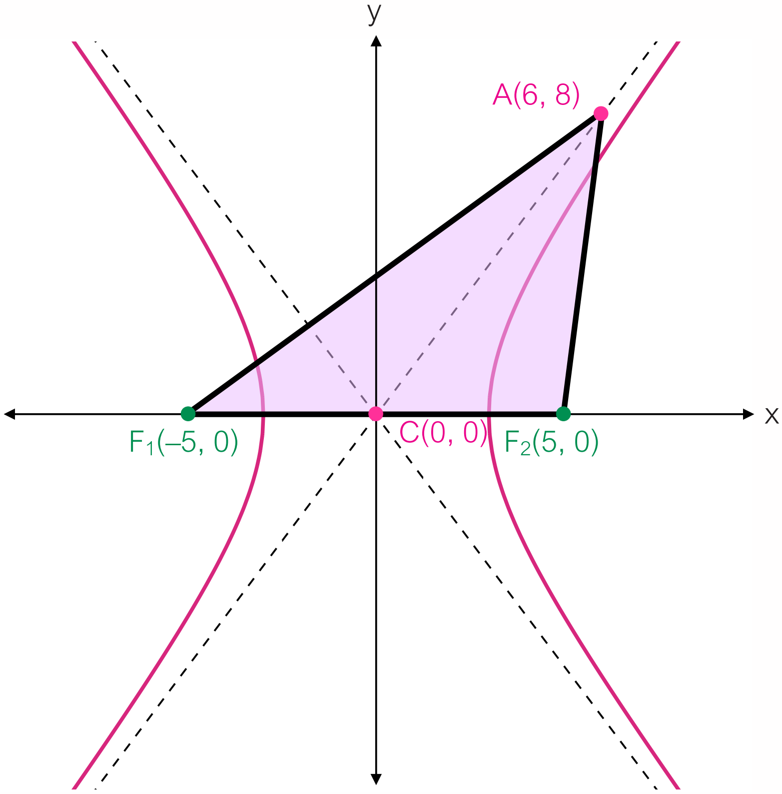
จะเห็นว่า $a = 3$ และ $b = 4$ จากสูตรความสัมพันธ์ $c^2 = a^2 + b^2$ เราจะได้ $c = 5$

สรุปได้ว่าไฮเพอร์โพลา H เป็นไฮเพอรโพลานอนมีจุดศูนย์กลาง C(0, 0) และมีจุดโฟกัส $F_1(-5, 0)$ และ $F_2(5, 0)$

และมีสมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{b}{a}x$ ⇨ $y = \pm\frac{4}{3}x$

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้จุด A(6, k) โดย $k > 0$ และอยู่บนเส้นกำกับ

แทนค่า $x = 6$ ลงในสมการเส้นกำกับ ; $y = \pm\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{(6)}^{2}$ ดังนั้น $y = \cancel{-8}, 8$ (เนื่องจากโจทย์กำหนด $k > 0$)



พื้นที่สามเหลี่ยม AF_1F_2 เท่ากับ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง $= \frac{1}{\cancel{2}} \times [5-(-5)] \times \cancel{8}^{4} = 40$

พื้นที่สามเหลี่ยม $AF_1F_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_2 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|\cancel{(-5)(0)} + (5)(8) + \cancel{(6)(0)} - \cancel{(0)(5)} - (0)(6) - (8)(-5)|$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{80}^{40} = 40$

ตอบ D

9) **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์กำหนดให้วงรีมีสมการ $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$

จัดรูปสมการทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ;

$$
\begin{aligned}
9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 &= 0 \\
(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 24y) &= -36 \\
9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 6y) &= -36 \\
9[(x^2 - 2(2)x + 2^2) - 2^2] + 4[(y^2 - 2(3)y + 3^2) - 3^2] &= -36 \\
9(x-2)^2 + 4(y-3)^2 &= \cancel{-36} + \cancel{36} + 36 \\
\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1 \\
\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} &= 1
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าวงรีที่มีสมการ $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(2, 3)$

หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 3) และ (5, 0) $\Rightarrow$ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$$\frac{0-3}{5-1} = \frac{y-3}{x-1} \Rightarrow \begin{aligned} 3(x-1) &= -4(y-3) \\ 3x + 4y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

โจทย์กำหนดให้วงกลมที่เราต้องการหามีจุดศูนย์กลางเดียวกับวงรีและสัมผัสเส้นตรง $4x + 3y - 13 = 0$
ดังนั้น **รัศมีของวงกลมนี้เท่ากับ ระยะห่างระหว่างจุด $C(2, 3)$ และเส้นตรง $4x + 3y - 13 = 0$**

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(2) + 4(3) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

<u>ตอบ</u> E

10) **วิธีทำ** หา a, b โดยโจทย์กำหนดให้ a, b เป็นคำตอบของสมการ $6^x - 3^{x+1} - 2^{x+2} + 12 = 0$

$$2^x \cdot 3^x - 3^{x+1} - 2^{x+2} + 12 = 0$$

$$2^x \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 2^x + 12 = 0$$

$$(3^x - 4)(2^x - 3) = 0$$

จะได้ว่า $3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$

$2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$

ดังนั้น $a = \log_3 4$ และ $b = \log_2 3$ จะได้ว่า $ab = (\log_3 4)(\log_2 3) = \frac{\log 4}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\log 2}$

$$ab = \frac{\log 2^2}{\log 2}$$

$$ab = \frac{2 \cdot \cancel{\log 2}}{\cancel{\log 2}} = 2$$

จากสมการ $(ab)^{2x+1} = (ab + 3)^x$ แทนค่า $ab = 2$; $2^{2x+1} = 5^x$

$$2^{2x+1} = 5^x$$

Take log ฐาน 2 ; $\log_2 2^{2x+1} = \log_2 5^x$

$$2x + 1 = x \cdot \log_2 5$$

$$2x - x \cdot \log_2 5 = -1$$

$$x(2 - \log_2 5) = -1$$

$$x = -\frac{1}{2 - \log_2 5}$$

$$x = \frac{1}{\log_2 5 - 2}$$

ตอบ D

11) **วิธีทำ** จาก $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$

เมทริกซ์ 3 x 3 ; $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$

$$= (\det A)^{3-1}$$

$$\therefore \quad \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{2}$$

โจทย์กำหนด det (adj A) = 225 ดังนั้น $(\det A)^{2} = 225$

$$\det A = 15 \text{ หรือ } -15$$

พิจารณาเมทริกซ์ที่โจทย์กำหนด

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & a \end{bmatrix}$$

หาค่า det A

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & a & 4 & 0 \end{array}\right.$$

$$\det A = (3a + 0 + 0) - (24 + 0 + 0)$$

$$\det A = 3a - 24$$

แทนค่า det A = 15

$$3a - 24 = 15$$
$$3a = 15 + 24$$
$$3a = 39$$
$$a = 13$$

แทนค่า det A = –15

$$3a - 24 = -15$$
$$3a = -15 + 24$$
$$3a = 9$$
$$a = 3$$

หาค่า a ได้แล้ว คือ a = 13 หรือ 3 แต่โจทย์กำหนด a > 10

$\therefore$ a = 13

ตอบ C

12) **<u>วิธีทำ</u>** โจทย์กำหนดให้เซต S เป็นคำตอบของสมการ $\log_x \left(\frac{x+3}{x-1}\right) \geq 1$

การปลดค่า log ต้องแยกพิจารณาออกเป็น 2 เงื่อนไข ระหว่างฟังก์ชันลด และฟังก์ชันเพิ่ม

เงื่อนไขที่ 1 : ฟังก์ชันลด เมื่อ 0 < x < 1 การปลดค่า log ต้องกลับเครื่องหมายอสมการ

$$\log_x \frac{x+3}{x-1} \geq \log_x x$$

ปลดค่า log กลับเครื่องหมาย ; $$\frac{x+3}{x-1} \leq x$$

$$\frac{x+3}{x-1} - x \leq 0$$

$$\frac{x+3-x^2+x}{x-1} \leq 0$$

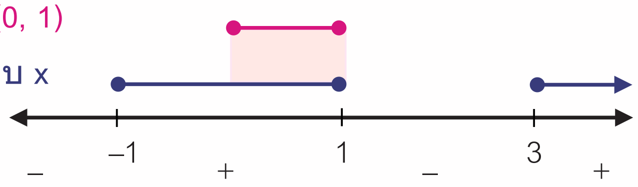
$$\frac{-x^2+2x+3}{x-1} \leq 0$$

คูณลบ –1 กลับเครื่องหมาย ; $$\frac{x^2-2x-3}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x-1} \geq 0$$

ช่วงพิจารณา (0, 1)

คำตอบ x



$x = [0, 1]$

เงื่อนไขที่ 2 : ฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ x > 1 การปลดค่า log ไม่ต้องกลับเครื่องหมายอสมการ

$$\log_x \frac{x+3}{x-1} \geq \log_x x$$

ปลดค่า log ; $$\frac{x+3}{x-1} \geq x$$

$$\frac{x+3}{x-1} - x \geq 0$$

$$\frac{x+3-x^2+x}{x-1} \geq 0$$

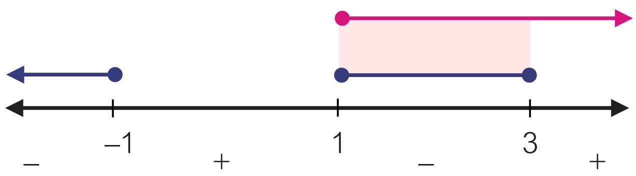
$$\frac{-x^2+2x+3}{x-1} \geq 0$$

คูณลบ –1 กลับเครื่องหมาย ; $$\frac{x^2-2x-3}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x-1} \leq 0$$

ช่วงพิจารณา x > 1

คำตอบ x



$x = [1, 3]$

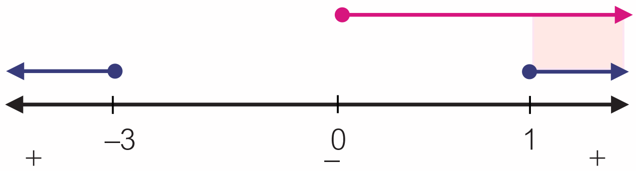
นำคำตอบทั้ง 2 เงื่อนไข ระหว่างฟังก์ชันลด และฟังก์ชันเพิ่ม มายูเนี่ยนกัน ($\cup$) เท่ากับ $[0, 1] \cup [1, 3] = [0, 3]$

12) <u>วิธีทำ</u> เงื่อนไขเพิ่มเติม : ฐานของ log ต้องมากกว่า 0 และค่าภายใน log ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0

ฐานของ log ต้องมากกว่า 0 ; $x > 0$ และ**ค่าภายใน log ต้องมากกว่า 0** ; $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$

ฐานของ log ต้องมากกว่า 0

ค่าภายใน log ต้องมากกว่า 0



$x = [1, \infty)$

จะได้ว่าคำตอบของเซต S ที่เป็นไปได้ คือ $[0, 3] \cap [1, \infty) = [1, 3]$

โจทย์กำหนดให้เซต T เป็นคำตอบของสมการ $\{\log_{\sqrt{3}} x \mid x \in S\}$

เราได้เซต S คือ [1, 3] เขียนในรูปอสมการ คือ $1 \leq x \leq 3$

$$1 \leq x \leq 3$$

Take log ฐาน $\sqrt{3}$;

$$\log_{\sqrt{3}} 1 \leq \log_{\sqrt{3}} x \leq \log_{\sqrt{3}} 3$$

$$0 \leq \log_{\sqrt{3}} x \leq 2$$

$$\log_{\sqrt{3}} x = [0, 2]$$

<u>ตอบ</u> A

13) **<u>วิธีทำ</u>** โจทย์กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^{\log_3 x^3} = 9x$

take log ฐาน 3 ; $\log_3 x^{\log_3 x^3} = \log_3 9x$

$\log_3 x^3 (\log_3 x) = \log_3 9 + \log_3 x$

$3\log_3 x \cdot \log_3 x = 2 + \log_3 x$

ให้ $M = \log_3 x$ $\quad 3M^2 = 2 + M$

$3M^2 - M - 2 = 0$

$(3M + 2)(M - 1) = 0$

$M = -\frac{2}{3}, 1$

แทนค่า $M = \log_3 x$ $\quad \log_3 x = -\frac{2}{3}, 1$

เซตคำตอบของ A คือ $x = 3^{-\frac{2}{3}}, 3$

โจทย์กำหนดให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_3 x^x = \frac{x}{3}$

$x \log_3 x = \frac{x}{3}$

$x \log_3 x - \frac{x}{3} = 0$

$x (\log_3 x - \frac{1}{3}) = 0$

$x = \cancel{0}$ และ $\log_3 x = \frac{1}{3}$

x เท่ากับ 0 ไม่ได้ เพราะค่าภายใน log ต้องมากกว่า 0 $\quad x = 3^{\frac{1}{3}}$

เซตคำตอบของ B คือ $x = 3^{-\frac{1}{3}}$

โจทย์กำหนดให้ C เป็นเซตคำตอบของสมการ $\{ab \mid a \in A \text{ และ } b \in A\}$

เซตคำตอบของ C คือ $\{ 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}, 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \} = \{ 3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{4}{3}} \}$

<u>ตอบ</u> B

14) **วิธีทำ** จากโจทย์ ขอกำหนดให้ $\tan^2(\frac{\P}{4} - \theta) = A$

ดังนั้น $\frac{A-1}{A+1} = \frac{3}{5}$

$$5(A-1) = 3(A+1)$$

$$5A - 5 = 3A + 3$$

$$5A - 3A = 3 + 5$$

$$2A = 8$$

$$A = 4$$

$$\therefore \tan^2(\frac{\P}{4} - \theta) = 4$$

$$\tan(\frac{\P}{4} - \theta) = \pm 2$$

โจทย์กำหนดให้ $\theta = \left[\frac{-\P}{4}, \frac{\P}{4}\right]$

$$\frac{-\P}{4} \leq \theta \leq \frac{\P}{4}$$

นำ -1 คูณตลอด

$$\frac{\P}{4} \geq -\theta \geq \frac{-\P}{4}$$

นำ $\frac{\P}{4}$ บวกตลอด

$$\frac{\P}{4} + \frac{\P}{4} \geq -\theta + \frac{\P}{4} \geq \frac{-\P}{4} + \frac{\P}{4}$$

$$\frac{\P}{2} \geq \frac{\P}{4} - \theta \geq 0$$

ดังนั้น เป็น Q_1 ค่า tan เป็นค่า +

$$\therefore \tan(\frac{\P}{4} - \theta) = 2$$

จาก $\tan(\frac{\P}{4} - \theta) = 2 = \dfrac{\tan\frac{\P}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\P}{4}\tan\theta}$

แทนค่า $\tan\frac{\P}{4} = 1$ ลงในสมการ ได้ดังนี้

$$2 = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$$

$$2(1 + \tan\theta) = 1 - \tan\theta$$

$$2 + 2\tan\theta = 1 - \tan\theta$$

$$2\tan\theta + \tan\theta = 1 - 2$$

$$3\tan\theta = -1$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{3}$$

จาก $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\sec^2\theta = 1 + (-\frac{1}{3})^2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \frac{1}{9}$$

$$\sec^2\theta = \frac{10}{9}$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{9}{10}$$

ตอบ E

15) **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์กำหนด $\sin 15° + \sin 55° = x$ และ $\cos 15° + \cos 55° = y$

$$(x + y)^2 - 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy$$
$$= x^2 + y^2$$

หาค่า $x^2 = (\sin 15° + \sin 55°)^2 = \sin^2 15° + 2\sin 15° \sin 55° + \sin^2 55°$

หาค่า $y^2 = (\cos 15° + \cos 55°)^2 = \cos^2 15° + 2\cos 15° \cos 55° + \cos^2 55°$

$$x^2 + y^2 = (\sin^2 15° + 2\sin 15° \sin 55° + \sin^2 55°) + (\cos^2 15° + 2\cos 15° \cos 55° + \cos^2 55°)$$
$$= (\sin^2 15° + \cos^2 15°) + (\sin^2 55° + \cos^2 55°) + (2\cos 15° \cos 55° + 2\sin 15° \sin 55°)$$
$$= \underbrace{\boxed{(\sin^2 15° + \cos^2 15°)}}_{1} + \underbrace{\boxed{(\sin^2 55° + \cos^2 55°)}}_{1} + 2\underbrace{\boxed{(\cos 15° \cos 55° + \sin 15° \sin 55°)}}_{\cos(15° - 55°) = \cos(-40°)}$$

$$x^2 + y^2 = 1 + 1 + 2[\cos(-40°)]$$
$$= 2 + 2[\cos(-40°)]$$

จาก $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$$x^2 + y^2 = 2 + 2\cos 40°$$
$$= 2 + 2\cos 2(20°)$$

จาก $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

$$x^2 + y^2 = 2 + 2(2\cos^2 20° - 1)$$
$$x^2 + y^2 = 2 + 4\cos^2 20° - 2$$
$$\therefore\ x^2 + y^2 = 4\cos^2 20°$$

สรุปสูตรคำนวณที่ใช้ในข้อนี้

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$	$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

<u>ตอบ</u> E

16) **วิธีทำ** จากโจทย์ให้หา $\sin(180^\circ + \arctan x)$

จากสูตรคำนวณ $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

ดังนั้น $\sin(180^\circ + \arctan x) = \sin 180^\circ\cos(\arctan x) + \cos 180^\circ\sin(\arctan x)$

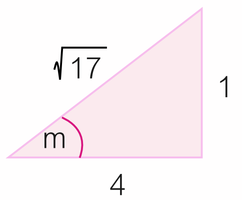
แทนค่า $\sin 180^\circ = 0$ และ $\cos 180^\circ = -1$ ลงในสมการ

$$\sin(180^\circ + \arctan x) = (0)\cos(\arctan x) + (-1)\sin(\arctan x)$$

$$= -1\sin(\arctan x)$$

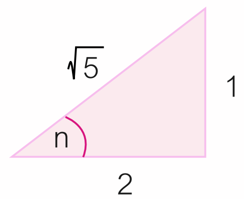
$$= -\sin(\arctan x)$$

กำหนดให้ $\arctan\frac{1}{4} = m$ และ $\arctan\frac{1}{2} = n$



$$\sin m = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos m = \frac{4}{\sqrt{17}}$$



$$\sin n = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos n = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

จากโจทย์ $\arctan x = \arctan\frac{1}{4} - 2\arctan\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arctan x = m - 2n$

ใส่ sin ทั้ง 2 ฝั่งของสมการ ; $\sin(\arctan x) = \sin(m - 2n)$

จากสูตร $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$$\sin(m - 2n) = \sin m\cos 2n - \cos m\sin 2n$$

จากสูตร $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ และ $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\sin(m - 2n) = (\sin m)(2\cos^2 n - 1) - (\cos m)[2(\sin n)(\cos n)]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left[2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1\right] - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)(2)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left[2\left(\frac{4}{5}\right) - 1\right] - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)(2)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{8-5}{5}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

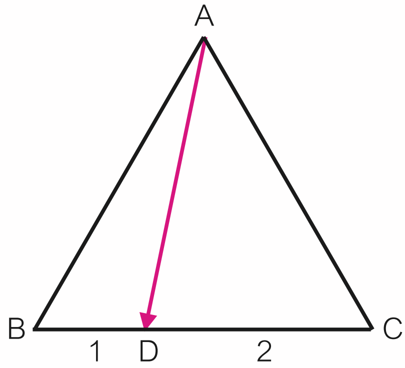
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{16}{5}\right)$$

ดังนั้น $\sin(\arctan x) = \frac{-13}{5\sqrt{17}}$

$\therefore$ $\sin(180^\circ + \arctan x) = -\sin(\arctan x) = -\left(\frac{-13}{5\sqrt{17}}\right) = \frac{13}{5\sqrt{17}}$

ตอบ C

17) **วิธีทำ** วาดรูปจากที่โจทย์ให้สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และจุด D เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่งทำให้ $|\overrightarrow{BD}| : |\overrightarrow{BC}| = 1 : 3$



ก. $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

จากรูปเขียนความสัมพันธ์เวกเตอร์ในรูป $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

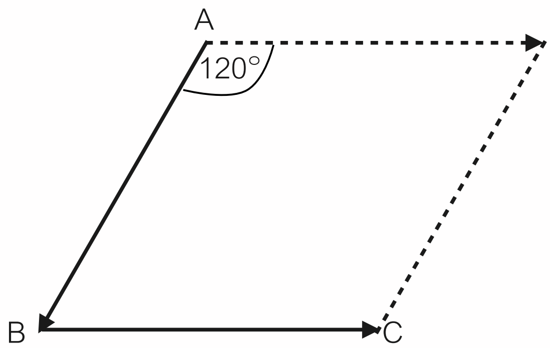
เขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูป AB และ BC ; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

แทนค่า AB และ BC ลงใน AD ; $\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC})$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$

ข้อ ก. ผิด

ข. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{6}|\overrightarrow{BC}|^2$



(เนื่องจาก ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังนั้น $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ และ $\theta = 120°$)

มุม θ ต้องเป็นมุมที่ระหว่างหางของทั้ง 2 เวกเตอร์

จากข้อ ก. เราได้ว่า $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

หาค่า $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}) + (\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta + \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BC}|\cos 120° + \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2 + \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{6}|\overrightarrow{BC}|^2$$

ข้อ ข. ถูก

17) **วิธีทำ**

ค. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

จากข้อ ก. เราได้ว่า $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

จากรูป $AB = AC + CB = AC + (-BC) = AC - BC$

แทนค่า AB ลงใน AD ; $AD = (AC - BC) + \frac{1}{3}BC$

$$AD = AC - \frac{2}{3}BC$$

$$\frac{2}{3}BC = AC - AD$$

$$\frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AD$$

ข้อ ค. ผิด

ตอบ C

18) **วิธีทำ** เมื่อ z เป็นคำตอบของสมการแล้ว $\overline{z}$ ต้องเป็นคำตอบของสมการด้วย

ดังนั้น $(x - z)(x - \overline{z}) = 0$

$$[x - (\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}i)][x - (\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{39}}{4}i)] = 0$$

$$[(x - \frac{3}{4}) - \frac{\sqrt{39}}{4}i][(x - \frac{3}{4}) + \frac{\sqrt{39}}{4}i] = 0$$

จากสูตร (น – ล)(น + ล) = น^2 – ล^2

$$(x - \frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{39}}{4}i)^2 = 0$$

$$x^2 - (2)(x)(\frac{3}{4}) + (\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{39}}{4}i)^2 = 0$$

$$x^2 - (\cancel{2})(x)(\frac{3}{\cancel{4}_{2}}) + \frac{9}{16} - \frac{39i^2}{16} = 0$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{16} - \frac{39(-1)}{16} = 0$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{16} + \frac{39}{16} = 0$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9 + 39}{16} = 0$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{48}{16} = 0$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{\cancel{48}^{3}}{\cancel{16}} = 0$$

$$x^2 - \frac{3x}{2} + 3 = 0$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสมการ ; $2x^2 - 3x + 6 = 0$

เศษจากการหารด้วย $x + 2$; $P(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 6$

$= 2(4) + 6 + 6$

$= 8 + 6 + 6$

$= 20$

ตอบ D

19) **<u>วิธีทำ</u>** จำนวนนักเรียนทั้งหมด คือ ชาย 6 คน และ หญิง 4 คน รวมทั้งสิ้น $6 + 4 = 10$ คน

วิธียืนเรียงเป็นเส้นตรงของคน 10 คน คือ 10! $\therefore n(S) = 10!$

หาค่า a โดยที่ a = ความน่าจะเป็นที่ไม่มีนักเรียนหญิงสองคนใดยืนติดกันเลย

ถ้าเจอกรณีแบบนี้ ให้จับผู้ชายยืนกระจายกัน แล้วเหลือช่องว่าง ให้ผู้หญิงเลือกไปยืนตำแหน่งช่องว่างนั้น ๆ

↑ ช$_1$ ↑ ช$_2$ ↑ ช$_3$ ↑ ช$_4$ ↑ ช$_5$ ↑ ช$_6$ ↑

1 2 3 4 5 6 7

มีผู้หญิงทั้งหมด 4 คน แสดงว่า

ญ คนที่ 1 เลือกช่องได้ทั้งหมด 7 ช่องในการยืน

ญ คนที่ 2 เลือกช่องได้ทั้งหมด 6 ช่องในการยืน เนื่องจาก ญ คนแรกเลือกยืนไปแล้ว 1 ช่อง

ญ คนที่ 3 เลือกช่องได้ทั้งหมด 5 ช่องในการยืน เนื่องจาก ญ 2 คนแรกเลือกยืนไปแล้ว 2 ช่อง

ญ คนที่ 4 เลือกช่องได้ทั้งหมด 4 ช่องในการยืน เนื่องจาก ญ 3 คนแรกเลือกยืนไปแล้ว 3 ช่อง

ผู้หญิงจะเลือกยืนได้ทั้งหมด $\therefore 7 \times 6 \times 5 \times 4$

ผู้ชายทั้งหมด 6 คนที่ยืนเรียงเป็นเส้นตรง สามารถสลับที่กันได้อีก $\therefore 6!$

$n(E) = (7 \times 6 \times 5 \times 4)(6!)$

ดังนั้น $a = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{(7 \times 6 \times 5 \times 4)(6!)}{10!} = \frac{(7 \times 6!) \times (6 \times 5 \times 4)}{10!} = \frac{(7!) \times (6 \times 5 \times 4)}{10 \times 9 \times 8 \times (7!)}$

$a = \frac{(\cancel{7!}) \times (\cancel{6}^{2} \times \cancel{5} \times \cancel{4})}{\cancel{10}_{2} \times \cancel{9}_{3} \times \cancel{8}_{2} \times (\cancel{7!})} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

หาค่า b โดยที่ b = ความน่าจะเป็นที่นักเรียนหญิงทั้งหมดต้องยืนติดกัน

ถ้าเจอติดให้จับมัดเป็นก้อน แล้วอย่าลืมว่าในก้อนเดียวกันก็สลับที่กันได้

ญ$_1$ ญ$_2$ ญ$_3$ ญ$_4$ ช$_1$ ช$_2$ ช$_3$ ช$_4$ ช$_5$ ช$_6$

สลับที่เป็นแถวเส้นตรง จากทั้งหมด ชาย 6 คน + 1 มัดกลุ่มผู้หญิง $\therefore 7!$

จัดมัดเป็นก้อน ผู้หญิงทั้งหมด 4 คน แต่สลับที่กันได้ $\therefore 4!$

$n(E) = (7!)(4!)$

ดังนั้น $b = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{(7!)(4!)}{10!} = \frac{(7!)(4 \times 3 \times 2 \times 1)}{10 \times 9 \times 8 \times (7!)} = \frac{(\cancel{7!})(\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1)}{10 \times \cancel{9}_{3} \times \cancel{8} \times (\cancel{7!})} = \frac{1}{10 \times 3} = \frac{1}{30}$

โจทย์หา a + b ; $a + b = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{5 + 1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{\cancel{6}}{{}_{5}\cancel{30}} = \frac{1}{5} = 0.2$

<u>ตอบ</u> B

20) <u>วิธีทำ</u> ลองแทนค่า x = 0

$$\frac{1}{0^3}\left(\sqrt{1+0} - \sqrt{1-0} - \sqrt{(1+0)(1-0^2)} + \sqrt{(1-0)(1-0^2)}\right) = \frac{0}{0}$$

จะเห็นว่าโจทย์เป็น "รูปแบบไม่กำหนด" ดังนั้น ต้องทำการแก้โจทย์หาค่าลิมิตต่อ

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x)(1-x^2)} + \sqrt{(1-x)(1-x^2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x)(1+x)(1+x)} + \sqrt{(1-x)(1+x)(1-x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x)^2(1-x)} + \sqrt{(1-x)^2(1+x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - (1+x)\sqrt{1-x} + (1-x)\sqrt{1+x}\right)$$

กำหนดให้ $A = \sqrt{1+x}$ และ $B = \sqrt{1-x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(A - B - A^2B + AB^2 \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[(A-B) - AB(A-B) \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[(A-B)(1-AB) \right]$$

คูณคอนจูเกตทั้งพจน์ $(A - B)$ และพจน์ $(1 - AB)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[(A-B)(1-AB) \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[(A-B) \times \frac{A+B}{A+B} \times (1-AB) \times \frac{1+AB}{1+AB} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[\frac{(A^2-B^2)(1-A^2B^2)}{(A+B)(1+AB)} \right]$$

แทนค่า $A = \sqrt{1+x}$ และ $B = \sqrt{1-x}$ กลับไปคืน

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[\frac{[(1+x)-(1-x)][1-(1+x)(1-x)]}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left[\frac{[2x][1-(1-x^2)]}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x^3}}\left[\frac{2\cancel{x^3}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})}$$

20) <u>**วิธีทำ**</u>

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1+x}\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0})(1 + \sqrt{1+0}\sqrt{1-0})}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{(\cancel{2})(1+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

<u>**ตอบ**</u> C

21) **วิธีทำ** โจทย์กำหนดให้เส้นตรง $2x + y - 6 = 0$ สัมผัสกับกราฟ f ที่จุด (1, 4)

แสดงว่า $f'(1)$ เท่ากับความชันของเส้นตรง $2x + y - 6 = 0$ และ $f(1) = 4$

จัดรูปสมการทั่วไป $2x + y - 6 = 0$ $\Rightarrow$ ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ; $y = -2x + 6$

ดังนั้น ความชันเส้นตรง $2x + y - 6 = 0$ เท่ากับ -2

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx$$

$$f'(x) = \int ax\,dx$$

$$f'(x) = a\frac{x^2}{2} + C_1$$

จากที่กล่าวมา $f'(1) = -2$; $f'(1) = a\frac{1^2}{2} + C_1 = -2$

$$C_1 = -2 - \frac{a}{2}$$

จะได้ว่า $f'(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{a}{2} - 2$

หา $f(x) = \int f'(x)\,dx$; $\int f'(x)\,dx = \frac{ax^3}{6} - \frac{ax}{2} - 2x + C_2$

โจทย์กำหนดให้ $f(0) = 8$; $f(0) = \frac{a\cancel{(0)}^3}{6} - \frac{a\cancel{(0)}}{2} - 2\cancel{(0)} + C_2 = 8$

$$C_2 = 8$$

จะได้ว่า $f(x) = \frac{ax^3}{6} - \frac{ax}{2} - 2x + 8$

โจทย์กำหนดให้ f ผ่านจุด (1, 4) จะได้ว่า $f(1) = 4$

$$\frac{a(1)^3}{6} - \frac{a(1)}{2} - 2(1) + 8 = 4$$

$$\frac{-2a}{6} = -2$$

$$a = 6$$

จะได้ว่า $f(x) = x^3 - 3x - 2x + 8$

หาค่าของ $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 - 3x - 2x + 8\,dx$

$$= \left.\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - x^2 + 8x\right|_0^1$$

$$= \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} - (1)^2 + 8(1)\right] - \left[\frac{\cancel{(0)}^4}{4} - \frac{3\cancel{(0)}^2}{2} - \cancel{(0)}^2 + 8\cancel{(0)}\right]$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 8$$

$$= \frac{23}{4}$$

ตอบ B

22) **วิธีทำ** จากโจทย์หาค่าลิมิต ดังนี้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{(a_n - a_{n+4})a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2-2} + 7}{[a_n - (a_{n+4-2} + 7)]a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 7}{[a_n - (a_{n+2} + 7)]a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 7}{[a_n - (a_{n+2-2} + 7 + 7)]a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 7}{[a_n - (a_n + 14)]a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 7}{-14a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(1 + 7/a_n)}{-14a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a_n}(1 + 7/a_n)}{-14\cancel{a_n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(1) \quad + \quad 7\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(-14)}$$

$$= \frac{1 + 7(0)}{-14}$$

$$= -\frac{1}{14}$$

หรือจากบรรทัดนี้ เราก็ตอบได้เลย ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 7}{-14a_n} = -\frac{1}{14}$

เนื่องจาก

ดีกรีของเศษ = ดีกรีของส่วน $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\text{ค่า สปส ของดีกรีสูงสุดในเศษ}}{\text{ค่า สปส ของดีกรีสูงสุดในส่วน}}$

ตอบ E

23) **วิธีทำ** โจทย์กำหนดให้ $h(x) = f(x)\,g(x)$ เราจะได้ว่า

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}(x^3+x-2) & ; x \neq 1 \\ 2(x^3+x-2) & ; x = 1 \end{cases}$$

ถ้าเราต้องการหาค่า $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ ต้องพิจารณาเงื่อนไข $x \neq 1$ คือ $\dfrac{x^3+x-2}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3+x-2}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} x^2+x+2$$

$$\lim_{x \to 1} h(x) = (1)^2+(1)+2 = 4$$

การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่ มีขั้นตอนการตรวจสอบ ดังนี้

1) $f(c)$ หาค่าได้

2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้

3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

1) $h(x) = 2(x^3+x-2)$ เมื่อ $x = 1$

$h(1) = 2(1^3+1-2) = 0$

2) จากข้างต้นเราได้ค่า $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 4$

3) จะเห็นว่า $h(1) \neq \lim\limits_{x \to 1} h(x)$ ดังนั้น $h(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

ตอบ E

24) **วิธีทำ** จากโจทย์ พิจารณาข้อความ ก., ข. และ ค. ได้ดังนี้

ก. $m_{50} = a_{49} + m_{49}$

$= a_{49} + (a_{48} + m_{48})$

$= a_{49} + a_{48} (a_{47} + m_{47})$

$\vdots$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$m_{50} = m_1 + \sum_{n=1}^{49} a_n$

$m_{50} = m_1 + \frac{49}{2}(a_1 + a_{49})$

$m_{50} = m_1 + \frac{49}{2}[(a_{25} - 24d) + (a_{25} + 24d)]$

$m_{50} = m_1 + \frac{49}{2}[(a_{25} - \cancel{24d}) + (a_{25} + \cancel{24d})]$

$m_{50} = m_1 + \frac{49}{2}(2a_{25})$

เนื่องจากโจทย์กำหนด $m_1 = a_2$ จึงแทนค่าลงในสมการ

$m_{50} = a_2 + \frac{49}{\cancel{2}}(\cancel{2}a_{25})$

$\therefore$ $m_{50} = a_2 + 49a_{25}$ ข้อ ก. ✓

ข. $m_5 = a_4 + m_4$

$m_5 = a_4 + a_3 + m_3$

$m_5 = a_4 + a_3 + a_2 + m_2$

$m_5 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + m_1$

โจทย์กำหนด $m_1 = a_2$

$m_5 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_2$

$m_5 = a_4 + a_3 + 2a_2 + a_1$

$m_5 = a_4 + (a_2 + d) + 2a_2 + (a_2 - d)$

$m_5 = a_4 + (a_2 + \cancel{d}) + 2a_2 + (a_2 - \cancel{d})$

$m_5 = a_4 + 4a_2$ ข้อ ข. ✓

ค. $m_2 + m_4 = (a_1 + m_1) + (a_3 + m_3)$

$m_2 + m_4 = (a_1 + m_1) + (a_3 + a_2 + m_2)$

$m_2 + m_4 = (a_1 + m_1) + (a_3 + a_2 + a_1 + m_1)$

$m_2 + m_4 = a_1 + m_1 + a_3 + a_2 + a_1 + m_1$

เนื่องจากโจทย์กำหนด $m_1 = a_2$ จึงแทนค่าลงในสมการ

$m_2 + m_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_2 + a_1 + a_2$

$m_2 + m_4 = a_1 + a_2 + (a_2 + d) + a_2 + (a_2 - d) + a_2$

$m_2 + m_4 = a_1 + a_2 + (a_2 + \cancel{d}) + a_2 + (a_2 - \cancel{d}) + a_2$

$m_2 + m_4 = a_1 + 5a_2$ ข้อ ค. ✓

ตอบ D

25) **วิธีทำ** จากโจทย์แบ่งการพิจารณาเศษและส่วนแยกกันดังนี้

พิจารณาเศษ ; $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{n=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

พิจารณาส่วน ; $1(2) + 2(3) + 3(4) + \dots + (n-1)(n) = \sum_{n=1}^{n} [(i-1)(i)]$

$$= \sum_{n=1}^{n} (i^2 - i)$$

$$= \sum_{n=1}^{n} i^2 - \sum_{n=1}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

จากโจทย์กำหนด $\frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}} = \frac{231}{228}$

$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{231}{228}$$

$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{(2)(3)}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{(2)(3)} - \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\cancel{231}\ 77}{\cancel{228}\ 76}$$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}[\frac{(2n+1)}{3}]}{\frac{n(n+1)}{2}[\frac{(2n+1)}{3} - 1]} = \frac{77}{76}$$

$$\frac{\cancel{\frac{n(n+1)}{2}}[\frac{(2n+1)}{3}]}{\cancel{\frac{n(n+1)}{2}}[\frac{(2n+1)}{3} - 1]} = \frac{77}{76}$$

$$\frac{[\frac{(2n+1)}{3}]}{[\frac{(2n+1)}{3} - 1]} = \frac{77}{76}$$

$$\frac{(2n+1)}{3} = \frac{77}{76}[\frac{(2n+1)}{3} - 1]$$

$$\frac{(2n+1)}{3} = \frac{77}{76}[\frac{(2n+1)-3}{3}]$$

$$\frac{(2n+1)}{\cancel{3}} = \frac{77}{76}[\frac{(2n+1)-3}{\cancel{3}}]$$

$$(2n+1) = \frac{77}{76}[(2n+1)-3]$$

$$(2n+1) = \frac{77}{76}(2n-2)$$

$$76(2n+1) = 77(2n-2)$$

$$38(2n+1) = 77(n-1)$$

$$76n + 38 = 77n - 77$$

$$38 + 77 = 77n - 76n$$

$$\therefore \quad 115 = n$$

ตอบ C

26) **วิธีทำ** จากโจทย์หาค่า a_n ได้จากสูตรค่าเฉลี่ยเลขคณิต ดังนี้

$$\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต } (a_n) = \frac{\text{ผลบวกของข้อมูลทุกตัว}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$$

$$\text{ผลบวกของข้อมูลทุกตัว} = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + \ldots + \overbrace{n, n, n, \ldots, n}^{n \text{ พจน์}}$$

$$= 1 + 2(2) + 3(3) + \ldots + n(n)$$

$$= 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$= \sum_{n=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{....สมการ (1)}$$

$$\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$= \sum_{n=1}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{....สมการ (2)}$$

นำสมการ (1) ÷ (2) จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (a_n)

$$\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต } (a_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \div \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n(n+1)}(2n+1)}{\cancel{6}\,3} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{n(n+1)}}$$

$$= \frac{(2n+1)}{3}$$

โจทย์ให้หาค่าของ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$;

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{(2n+1)}{3} \times \frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 + \frac{1}{n}}{3}\right]$$

$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} (2) + \cancelto{0}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right)}}{\lim\limits_{n \to \infty} (3)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ตอบ D

27) **วิธีทำ** จากโจทย์มีข้อมูลทั้งหมด 5 จำนวน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 $\therefore$ $N = 5$ และ $\overline{x} = 6$

จาก $\sum_{i=1}^{N}(x_i - 4)^2$ ให้เรากระจายกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้ $(x_i - 4)^2 = x_i^2 - 8xi + 16$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - 4)^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \sum_{i=1}^{5} 8x_i + \sum_{i=1}^{5} 16$$

$$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 8(N\overline{x}) + 16(N)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 8(5)(6) + 16(5)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 240 + 80$$

$$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 160$$

จากโจทย์กำหนด $\sum_{i=1}^{N}(x_i - 4)^2 = 30$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 160 = 30$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 190$$

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{190}{5} - (6)^2} = \sqrt{38 - 36} = \sqrt{2}$$

ตอบ A

28) **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์กำหนดความชันมาให้

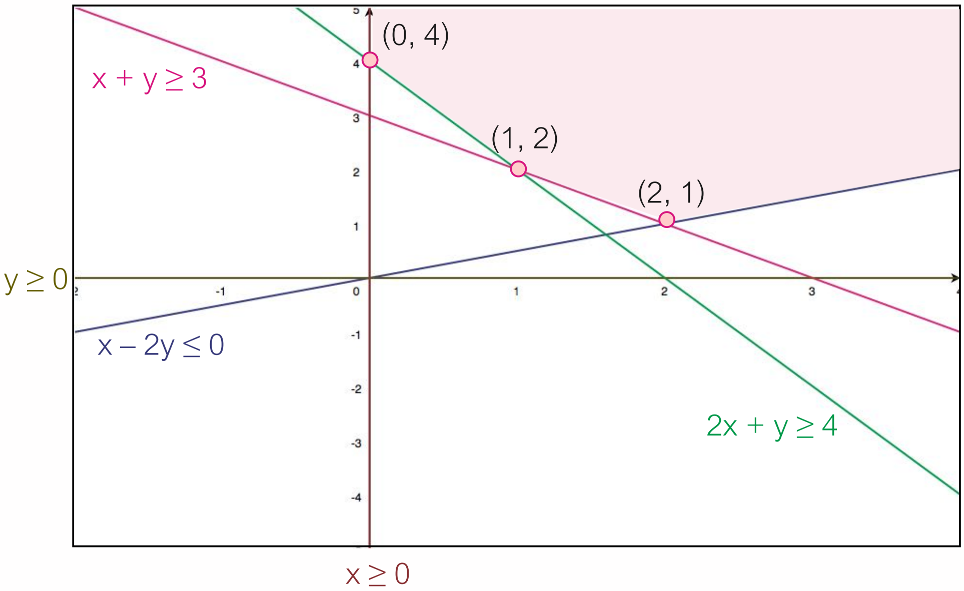
$\therefore m = \frac{-3}{2} = \frac{-a}{b}$

ดังนั้น $a = 3, b = 2$

จาก $z = ax + by$; แทนค่า $a = 3$ และ $b = 2$ ลงในสมการ

$\therefore$ สมการจุดประสงค์ คือ $z = 3x + 2y$

นำสมการทั้งหมดที่โจทย์กำหนดมาวาดกราฟ แล้วพลอตจุดที่ตัดกัน ได้ดังกราฟด้านล่าง



นำจุดที่ตัดกัน 3 จุด แทนลงในสมการจุดประสงค์ z เพื่อหาค่าที่น้อยที่สุด

จุดตัด	ค่า $z = 3x + 2y$
(0, 4)	$z = 3(0) + 2(4) = 0 + 8 = 8$
(1, 2)	$z = 3(1) + 2(2) = 3 + 4 = 7$ ***มีค่าน้อยที่สุด***
(2, 1)	$z = 3(2) + 2(1) = 6 + 2 = 8$

เกิดค่า z ที่น้อยที่สุดที่จุด (x_0, y_0) คือ $(1, 2)$ $\therefore x_0 = 1, y_0 = 2$

โจทย์ต้องการหาค่า $x_0 - y_0$; $x_0 - y_0 = 1 - 2 = -1$

<u>ตอบ</u> C

29) **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์กำหนดควอไทล์ที่หนึ่งของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 31

$$Q_1 = \frac{1(N+1)}{4} = \frac{1(25+1)}{4} = \frac{26}{4} = 6.5$$

$$31 = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

$$62 = x_6 + x_7$$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$x_6 = 20 + 5d$$

$$x_7 = 20 + 6d$$

$x_6 + x_7$; $62 = (20 + 5d) + (20 + 6d)$

$$62 = 40 + 11d$$

$$22 = 11d$$

$$2 = d$$

$\therefore$ ข้อมูลชุดนี้ คือ 20, 22, 24, …,68

$\therefore$ ข้อมูลตรงกลาง คือ x_{13}

$$x_{13} = a_1 + (n-1)(d) = 20 + (13-1)(2) = 20 + (12)(2) = 20 + 24 = 44$$

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{N}$$

$$= \frac{|20-44| + |22-44| + |24-44| + \ldots + |68-44|}{25}$$

$$= \frac{4(1+2+3+4+\ldots+12)}{25}$$

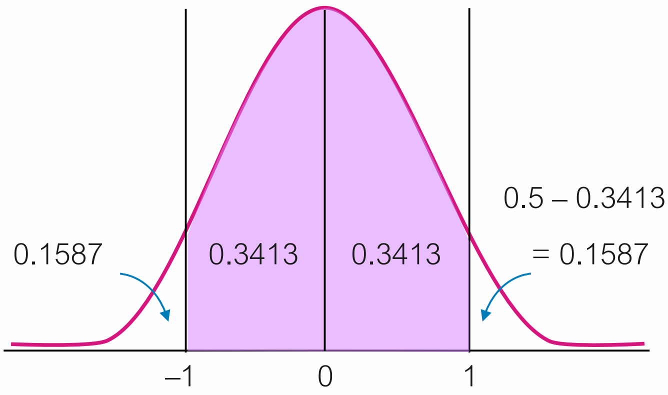
$$= \frac{4\left[\frac{12}{2}(12+1)\right]}{25}$$

$$= \frac{312}{25}$$

$$=12.48$$

<u>ตอบ</u> D

30) **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์กำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง z = 0 ถึง z = 1 เท่ากับ 0.3413 สามารถวาดรูปได้ ดังนี้



โจทย์ให้หาจำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนน ซึ่งต่างจากคะแนนเฉลี่ยมากกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$|x_i - \bar{x}| \quad > \quad S.D.$$

$$\frac{|x_i - \bar{x}|}{S.D.} \quad > \quad 1$$

$$|z_i| \quad > \quad 1$$

$\therefore$ $z_i > 1$ หรือ $z_i < 1$

พื้นที่ $z > 1 = 0.1587$

พื้นที่ $z < 1 = 0.1587$

รวมกัน = 2(0.1587) = 0.3174

จำนวนนักเรียนทั้งกลุ่ม คือ 20,000 คน

$\therefore$ 20,000(0.3174) = 6,348 คน

<u>ตอบ</u> C

1) **วิธีทำ** จาก $P(A') = 1 - P(A)$

และ $P(B') = 1 - P(B)$

โดยที่ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.9 = P(A) + P(B) - 0.5$$

$$1.4 = P(A) + P(B)$$

จาก $P(A') + P(B') = [1 - P(A)] + [1 - P(B)]$

$$\begin{aligned} P(A') + P(B') &= 1 - P(A) + 1 - P(B) \\ &= 1 + 1 - P(A) - P(B) \\ &= 2 - P(A) - P(B) \\ &= 2 - [P(A) + P(B)] \\ &= 2 - 1.4 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

ตอบ 0.6

2) **<u>วิธีทำ</u>** หาช่วงคำตอบของเซต A ; $x > |x - 1|$

ช่วงที่ 1 : พิจารณาเมื่อ $x \geq 1$ เมื่อปลดค่าสัมบูรณ์ $x \geq x - 1 \Rightarrow 0 \geq -1$

คำตอบของช่วงที่ 1 คือ $[1, \infty)$

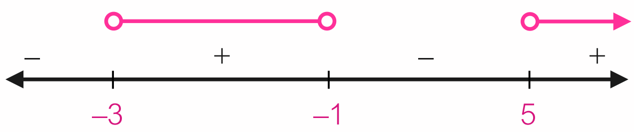
ช่วงที่ 2 : พิจารณาเมื่อ $x < 1$ เมื่อปลดค่าสัมบูรณ์ $x > -(x - 1)$

$$x > \frac{1}{2}$$

คำตอบของช่วงที่ 2 คือ $[0.5, 1)$

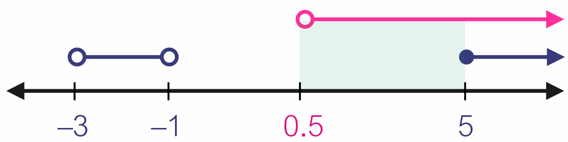
คำตอบของเซต A คือ $(0.5, 1) \cup [1, \infty) = (0.5, \infty)$

หาช่วงคำตอบของเซต B ; $\dfrac{x - 5}{(x + 1)(x + 3)} > 0$



คำตอบของเซต B คือ $(-3, -1) \cup (5, \infty)$

โจทย์ต้องการหาช่วงของ $A - B = (a, b)$



เซต A $= (0.5, \infty)$
เซต B $= (-3, -1) \cup (5, \infty)$

$A - B = (0.5, 5) = (a, b)$

จะได้ว่า $a = 0.5$ **และ** $b = 5$

ดังนั้น $a + b = 0.5 + 5 = 5.5$

<u>ตอบ</u> 5.5

3) **วิธีทำ** จาก 14351 = 14097(1) + 254

14097 = 245(55) + 127

254 = 127(2)

$\therefore x = 127$

หาค่า x หาร 144 เหลือเศษที่เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$\frac{144}{127} = 127\frac{17}{127}$$

$\therefore$ เศษที่เหลือจากการหาร เท่ากับ 17

ตอบ 17

4) <u>**วิธีทำ**</u> **หาค่า a** จากโจทย์กำหนดให้ $f'(1) = 4$ เนื่องจากเราพิจารณาที่ $x = 1$ ดังนั้น $f(x) = ax^2 + b$

$$f(x) = ax^2 + b$$

$$f'(x) = 2ax$$

แทนค่า $x = 1$; $f'(1) = 2a(1) = 4$

$$a = 2$$

หาค่า b จากโจทย์กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แสดงว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ด้วย

การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ หรือไม่ มีขั้นตอนการตรวจสอบ ดังนี้

1) $f(c)$ หาค่าได้

2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้

3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b & ; x \geq 0 \\ x^3 + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

1) $f(x) = 2x^2 + b$ เมื่อ $x = 0$

$f(0) = 2(0)^3 + b = b$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 + 1 = (0)^3 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x^2 + b = 2(0)^2 + b = b$

2) เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$$b = 1$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

หาค่า $fof\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = f\left(f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)$

เมื่อ $x < 0$ $f(x) = x^3 + 1$; $f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

เมื่อ $x \geq 0$ $f(x) = 2x^2 + 1$; $fof\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5$

<u>**ตอบ**</u> 1.5

5) **<u>วิธีทำ</u>** โจทย์ต้องการหาค่า R_{gof}

$$gof = g(f(x))$$

$$gof = g(10^x)$$

$$gof = \sqrt{100-3(10^x)^2}$$

$$gof = \sqrt{100-3(100^x)}$$

<u>หาเรนจ์จากการพิจารณาเป็นช่วงโดยเริ่มจากพจน์ x ก่อน</u>

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเป็นบวกเสมอ

$$100^x > 0$$

$$-3(100^x) < 0 \quad ; \text{ คูณ } -3 \text{ ต้องกลับเครื่องหมายด้วย}$$

$$100 - 3(100^x) < 100$$

$$\sqrt{100-3(100^x)} < 10 \quad ; \text{ ใส่รากที่ 2 ตลอด}$$

$$0 \le \sqrt{100-3(100^x)} < 10 \quad ; \text{ เนื่องจากค่ารากที่ 2 มากกว่า 0 เสมอ}$$

$$0 \le gof < 10$$

ดังนั้น จะได้ว่า $R_{gof} = [0, 10)$ **จะเห็นว่าจำนวนเต็มที่มากที่สุดของช่วง [0, 10) คือ 9**

<u>ตอบ</u> 9

6) **วิธีทำ** จากโจทย์กำหนด $2AB = I$

$$A(2B) = I$$

$$A(A^{-1}) = I$$

$$\therefore \quad A^{-1} = 2B$$

$$A^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

โจทย์กำหนด $AX = C$

$$A^{-1}AX = A^{-1}C$$

$$X = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(1) + (-2)(0) + (0)(2) \\ (0)(1) + (2)(0) + (4)(2) \\ (6)(1) + (0)(0) + (2)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 8 \\ 6 + 0 + 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 2$, $y = 8$ และ $z = 10$

$\therefore x + y + z = 2 + 8 + 10 = 20$

ตอบ 20

7) **วิธีทำ** จัดรูปสมการจากที่โจทย์ให้มา

$$1 + (2\log_x 3)(\log_9 (9-x)) = \log_x 14$$

$$1 + \frac{\cancel{\log 3^2}}{\log x} \cdot \frac{\log (9-x)}{\cancel{\log 9}} = \log_x 14$$

$$1 + \frac{\log (9-x)}{\log x} = \log_x 14$$

$$1 + \log_x (9-x) = \log_x 14$$

$$\log_x x + \log_x (9-x) = \log_x 14$$

$$\log_x [x(9-x)] = \log_x 14$$

$$x(9-x) = 14$$; ฐาน log เท่ากัน จับนำมาเท่ากัน

$$9x - x^2 = 14$$

$$-14 + 9x - x^2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0$$

$$x = 2, 7$$

จะได้ว่าผลบวกของคำตอบ เท่ากับ $2 + 7 = 9$

ข้อควรรู้ : ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ หรือสมการ $ax^2 + bx + c$ มี 2 คำตอบ จะได้ค่า

ผลบวกของ 2 คำตอบ คือ $-\frac{b}{a}$

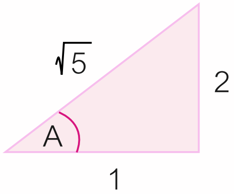
ตัวอย่าง : $x^2 - 9x + 14 = 0$

ผลบวกของ 2 คำตอบ คือ $-\frac{-9}{1} = 9$

ตอบ 9

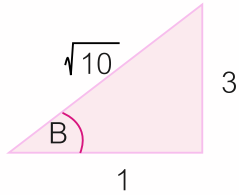
8) **<u>วิธีทำ</u>** จากค่า arctan 2 และ arctan 3 นำมาวาดรูปเป็นสามเหลี่ยมได้ ดังนี้

กำหนดให้ arctan 2 = A และ arctan 3 = B



$$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$$\sin B = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

จากสูตร $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$$\begin{aligned}
\sin(A + B) &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{50}} + \frac{3}{\sqrt{50}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{50}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{5 \times 5 \times 2}} \\
&= \frac{5}{5\sqrt{2}} \\
&= \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

<u>ตอบ</u> $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9) **วิธีทำ** โจทย์กำหนดให้ $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ ตั้งฉากกับ $\begin{bmatrix}-8\\a\end{bmatrix}$ แสดงว่า $(\vec{i}+4\vec{j})\cdot(-8\vec{i}+a\vec{j}) = 0$

$$(1)(-8)+(4)(a) = 0 \Rightarrow a = 2$$

โจทย์กำหนดให้ $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-8\\a\end{bmatrix}$

แทนค่า $a = 2$; $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-8\\2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\4b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-8c\\2c\end{bmatrix}$$

เราจะได้สมการ คือ

$b-8c = 5$ ....สมการ (1)

$4b+2c = 3$ ....สมการ (2)

นำสมการ 4 x (1) – (2) ; $-32c-2c = 20-3$

$$-34c = 17$$

$$c = -0.5$$

แทนค่า $c = -0.5$ ลงใน (2) ; $4b+2(-0.5) = 3$

$$4b = 4$$

$$b = 1$$

โจทย์ต้องการถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}$ แล้ว $\cos^2\theta$ เท่ากับเท่าใด

จากนิยามผลคูณเชิงสเกลาร์ ; $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$$\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix} = \sqrt{(a)^2+(0)^2}\cdot\sqrt{(b)^2+(c)^2}\cos\theta$$

แทนค่า $a = 2$, $b = 1$ และ $c = -0.5$;

$$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix} = \sqrt{(2)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(-0.5)^2}\cos\theta$$

$$(2)(1)+(0)(-0.5) = 2\cdot\sqrt{1.25}\cos\theta$$

$$\cancel{2} = \cancel{2}\sqrt{\frac{5}{4}}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\cos^2\theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

ตอบ 0.8

10) **วิธีทำ** จากความรู้ในบทจำนวนเชิงซ้อนที่เราทราบ

$$i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = i - 1 - i + 1 = 0$$

ข้อสังเกต : ชุด i^n บวกกัน จะรวมกันเป็น 0 ได้ เลขชี้กำลังของ i ตัวแรกหารด้วย 4 จะต้องเหลือเศษ 1 และ เลขชี้กำลังของ i ตัวสุดท้าย ต้องหารด้วย 4 ลงตัว

$$z = i^9 + i^{10} + \ldots + i^{126}$$

$$z = i^9 + i^{10} + \ldots + i^{124} + i^{125} + i^{126}$$

$$z = (i^9 + i^{10} + \ldots + i^{124}) + i^{125} + i^{126}$$

$$z = (0) + i^{125} + i^{126}$$

$$z = i^{125} + i^{126}$$

ตารางแสดงค่า i^n โดยที่ $n > 4$ ให้พิจารณาเศษที่เหลือจาก $\frac{n}{4}$			
เศษ 1	เศษ 2	เศษ 3	เศษ 4
$i^n = i^1 = \sqrt{-1}$	$i^n = i^2 = -1$	$i^n = i^3 = -i$	$i^n = i^4 = 1$

$$z = i^{125} + i^{126} = i^1 + i^2 = i - 1 = -1 + i$$

หาค่า z^{-1}

$$z^{-1} = \frac{1}{-1 + i} \times \frac{-1 - i}{-1 - i}$$

$$z^{-1} = \frac{-1 - i}{1^2 + 1^2}$$

$$z^{-1} = \frac{-1 - i}{2}$$

หาค่า $2z^{-1}$

$$2z^{-1} = 2\left(\frac{-1 - i}{2}\right)$$

$$2z^{-1} = \cancel{2}\left(\frac{-1 - i}{\cancel{2}}\right)$$

$$2z^{-1} = -1 - i$$

ตอบ $-1 - i$

11) **วิธีทำ** $n(S) = C_{11,4} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{7!\,4!}$

$$n(S) = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times (7!)}{(7!) \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11 \times 10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \cancel{8} \times (\cancel{7!})}{(\cancel{7!}) \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 11 \times 10 \times 3 = 330$$

จากสลาก 11 ใบ มีหมายเลข 1 ถึง 11 คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

สลากมี**เลขคี่ = 6 ใบ** และ**เลขคู่ = 5 ใบ**

ต้องการสุ่มหยิบสลาก 4 ใบ ให้ผลคูณของหมายเลขเป็นจำนวนคู่ แต่ผลบวกของหมายเลขเป็นจำนวนคี่

ดังนั้น มี 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณี 1</u> : คี่ 1, คู่ 3

คี่มี 6 เลือกมา 1 และคู่มี 5 เลือกมา 3 ; $\binom{6}{1}\binom{5}{3}$

$$\binom{6}{1}\binom{5}{3} = \frac{6!}{5!\,1!} \times \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,1!} \times \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60$$

<u>กรณี 2</u> : คี่ 3, คู่ 1

คี่มี 6 เลือกมา 3 และคู่มี 5 เลือกมา 1 ; $\binom{6}{3}\binom{5}{1}$

$$\binom{6}{3}\binom{5}{1} = \frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} \times \frac{5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times 1!} = 5 \times 4 \times 5 = 100$$

$\therefore$ n(E) = กรณี 1 + กรณี 2 = 60 + 100 = 160

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{160}{330} = \frac{16}{33} = 0.48$$

ตอบ 0.48

12) **<u>วิธีทำ</u>** พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = a^2x^2 + 4ax + 10$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$

$$\int_0^1 a^2x^2 + 4ax + 10\,dx = \left.\frac{a^2x^3}{3} + \frac{4ax^2}{2} + 10x\right|_0^1$$

$$= \left[\frac{a^2(1)^3}{3} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}a(1)^2}{\cancel{2}} + 10(1)\right] - \left[\cancel{\frac{a^2(0)^3}{3}} + \cancel{\frac{4a(0)^2}{2}} + 10\cancel{(0)}\right]$$

$$= \frac{a^2}{3} + 2a + 10$$

โจทย์ต้องการหาค่า a ที่ทำให้พื้นที่ปิดล้อมเส้นโค้งน้อยที่สุด
ดังนั้น เราจะใช้การหาจุดต่ำสุดสัมพัทธ์เข้ามาประยุกต์ โดยกำหนดให้พื้นที่ปิดล้อม $f(a) = \frac{a^2}{3} + 2a + 10$

หาจุดวิกฤติของ $f(a)$ โดย $f'(a) = 0$

$$f'(a) = \frac{2a}{3} + 2 = 0$$

$$a = -3$$

เนื่องจาก $f(a)$ เป็นสมการพาราโบลาโดยมีพจน์ดีกรี 2 เป็นบวก แสดงว่าจุดยอดของพาราโบลา (จุดวิกฤติ $x = 3$) เป็นจุดต่ำสุด หรือกล่าวว่าเป็นจุดที่มีพื้นที่ปิดล้อมน้อยที่สุดนั่นเอง

แทนค่า $a = -3$ ลงใน $f(a)$; $f(-3) = \frac{(-3)^2}{3} + 2(-3) + 10$

$$f(-3) = 3 + 2(-3) + 10$$

$$f(-3) = 7$$

พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = a^2x^2 + 4ax + 10$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$
จะน้อยที่สุดเมื่อ $a = -3$ และพื้นที่น้อยสุด เท่ากับ 7 ตารางหน่วย

<u>ตอบ</u> 7 ตารางหน่วย

13) **วิธีทำ** โจทย์กำหนดให้ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

จะได้ว่า $f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ ⇨ ดังนั้น $f'(3) = \frac{v(3)u'(3) - u(3)v'(3)}{[v(3)]^2}$

โจทย์กำหนดให้ $v(x) = x^2 - 2x$

หาค่า $v(3) = (3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$

$v'(x) = 2x - 2$ ⇨ $v'(3) = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4$

แทนค่า $u(3) = -9$, $u'(3) = 3$, $v(x) = 3$ และ $v'(3) = 4$ ลงใน $f'(3)$

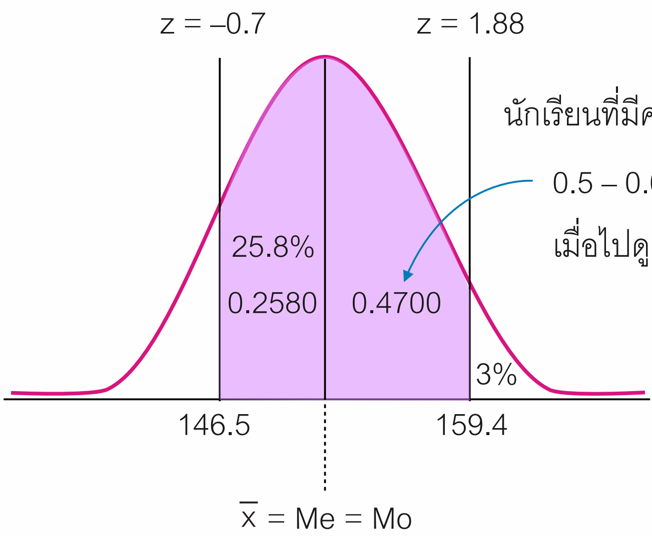
$$f'(3) = \frac{v(3)u'(3) - u(3)v'(3)}{[v(3)]^2}$$

$$f'(3) = \frac{(3)(3) - (-9)(4)}{[3]^2} = \frac{9 + 36}{9} = 5$$

ตอบ 5

14) **วิธีทำ** จากโจทย์กำหนด

z	0.3	0.7	1.49	1.88
พื้นที่	0.1179	0.2580	0.4319	0.4700



นักเรียนที่มีความสูงมากกว่า 159.4 มีอยู่ 3% = 0.03

0.5 – 0.03 = 0.47

เมื่อไปดูค่า z จากที่โจทย์กำหนด ตรงกับ z = 1.88

จากพื้นที่ใต้โค้ง z = 0 ถึง 146.5 ⇒ z = –0.7

$$-0.7 = \frac{146.5 - \bar{x}}{S}$$

$$-0.7S = 146.5 - \bar{x}$$

$$\bar{x} = 146.5 + 0.7S \quad \text{....สมการ (1)}$$

จากพื้นที่ใต้โค้ง z = 0 ถึง 159.4 ⇒ z = 1.88

$$1.88 = \frac{159.4 - \bar{x}}{S}$$

$$1.88S = 159.4 - \bar{x}$$

$$\bar{x} = 159.4 - 1.88S \quad \text{....สมการ (2)}$$

สมการ (1) = (2) ;

$$146.5 + 0.7S = 159.4 - 1.88S$$
$$0.7S + 1.88S = 159.4 - 146.5$$
$$2.58S = 12.9$$
$$S = 5$$

แทน S = 5 ลงใน (1) ;

$$\bar{x} = 146.5 + 0.7(5)$$
$$\bar{x} = 146.5 + 3.5$$
$$\bar{x} = 150$$

จาก $\bar{x}$ = Me = Mo $\therefore$ Mo = 150

ตอบ 150

15) **วิธีทำ** จากโจทย์กำหนดข้อมูลดังตาราง

ชุด 1	5	8	6	7	9
ชุด 2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

$$\overline{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{5+8+6+7+9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(5-7)^2+(8-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2}{5-1}}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{(-2)^2+(1)^2+(-1)^2+(0)^2+(2)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4+1+1+0+4}{5}}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

โจทย์กำหนดความแปรปรวนของข้อมูลชุดที่ 2 เท่ากับ 9 ; $S_2^2 = 9 \therefore S_2 = 3$

โจทย์กำหนดสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่หนึ่งเป็น 2 เท่าของข้อมูลชุดที่ 2

$$\frac{S_1}{\overline{x_1}} = 2\left(\frac{S_2}{\overline{x_2}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{7} = 2\left(\frac{3}{\overline{x_2}}\right)$$

$$\overline{x_2} = 2(3)\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overline{x_2} = 21\sqrt{2}$$

ตอบ $21\sqrt{2}$